

La recta real

Arturo Prudencio Nina

16 de abril de 2006

El siguiente artículo es publicado gratuitamente en la siguiente dirección:

www.publicaciones.prudencio.org

Para cualquier consulta enviar su mensaje al siguiente correo electrónico:

arturo@prudencio.org

Índice

1. Definiciones	3
2. Propiedades algebraicas	3
3. Aplicación de las propiedades	3
4. Números Racionales	4
5. Los axiomas de orden	4
5.1. Definición de símbolos de desigualdad	4
5.2. Demostraciones	5
6. El valor absoluto	6
6.1. Propiedades	6
6.2. Demostraciones	6
7. La propiedad de completación de \mathbb{R}	7
7.1. El axioma del supremo	8
7.2. La propiedad arquimediana	8
7.3. Ejercicios	9

1. Definiciones

Proposición Conjunto de símbolos que tiene un valor de verdad.

Axioma Proposición aceptado sin demostración.

Teorema Proposición verdadera que se demuestra a través de los axiomas.

Corolario Conclusión directa del teorema

Postulado Axiomas particulares

2. Propiedades algebraicas

Se acepta la existencia de un conjunto no vacío \mathbb{R} llamado conjunto de números reales. En este conjunto se definen dos operaciones binarias cerradas llamadas suma y producto ($+$ y \cdot). Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

1. Conmutatividad $(a + b) = (b + a)$
2. Asociatividad $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} / a + (-a) = 0$
5. Conmutatividad $a \cdot b = b \cdot a$
6. Asociatividad $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. Distributividad $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

3. Aplicación de las propiedades

1. Probar la ley de cancelación en los números reales si $a + x = a \Rightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}a + x &= a \\a + x + (-a) &= a + (-a) \\x &= 0\end{aligned}$$

2. Probar que $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned}a \cdot 0 &= a \cdot 0 \\a \cdot (0 + 0) &= a \cdot 0 \\a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot 0 \\a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) &= a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \\a \cdot 0 &= 0\end{aligned}$$

- 3.

4. Números Racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, n \neq 0 \right\}$$

Teorema 1 No existe un número racional r tal que $r^2 = 2$.

$$r^2 = 2 \Rightarrow r \notin \mathbb{Q}$$

Demostración. Supongase que existe un racional $r = \frac{m}{n}$ tal que $r^2 = 2$. Además m y n no tienen factores en común.

$$m^2 = 2n^2$$

Si m fuera impar entonces

$$m = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k + 1) + 1 = 2n^2 \rightarrow \leftarrow$$

Si m fuera par entonces

$$m = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$m^2 = 4k^2 = 2n^2 \rightarrow \leftarrow$$

De forma analoga al anterior análisis se halla que n debe ser par. Como m y n son números pares contradice al hecho de que m y n tienen factores comunes. Por tanto **NO** existe.

5. Los axiomas de orden

En \mathbb{R} existen un conjunto P llamado conjunto de números estrictamente positivos ($0 \notin P$). Entonces se cumplen los siguientes axiomas.

1. $x \in P, y \in P \Rightarrow x + y \in P$
2. Ley de la tricotomía. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Se cumple una y solo una única afirmación de las siguientes:
 $x \in P$ ó $x = 0$ ó $-x \in P$

5.1. Definición de símbolos de desigualdad

1. $a < b$ es lo mismo que $b - a \in P$
2. $a \leq b$ es lo mismo que $b - a \in P \cup \{0\}$
3. $a > b$ es lo mismo que $b < a$
4. $a \geq b$ es lo mismo que $b \leq a$

5.2. Demostraciones

1. Teorema Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Demostración 1

$$(a < b) \Rightarrow b - a \in P$$

$$(b < c) \Rightarrow c - b \in P$$

$$(b - a) + (c - b) \in P$$

$$c - a \in P$$

$$a < c$$

2. Teorema Si $a < b$ y $x < y$ entonces $a + x < b + y$

Demostración 2

$$(a < b) \Rightarrow b - a \in P$$

$$(x < y) \Rightarrow y - x \in P$$

$$(b - a) + (y - x) \in P$$

$$(b + y) - (a + x) \in P$$

$$a + x < b + y$$

3. Teorema Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

Demostración 3

$$(a < b) \Rightarrow b - a \in P$$

$$c \in P$$

$$(b - a) \cdot c \in P$$

$$bc - ac \in P$$

$$ac < bc$$

4. Teorema Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Demostración 4

$$(a < b) \Rightarrow b - a \in P$$

$$(-c) \in P$$

$$(b - a) \cdot (-c) \in P$$

$$ac - bc \in P$$

$$ac > bc$$

5. Probar que $1 > 0$

Demostración 5 *Caso contrario se tuviera* $1 < 0 \Rightarrow (-1) \in P \Rightarrow (-1)(-1) \in P \Rightarrow 1 \in P \Rightarrow 1 > 0 \rightarrow \leftarrow$

Por tanto $1 > 0$

6. El valor absoluto

El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ se define

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

6.1. Propiedades

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $|x^a| = |x|^a$
6. $|x|^2 = x^2$
7. $||x| - |y|| = |x \pm y|$

6.2. Demostraciones

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Demostración 6

2. $|xy| = |x||y|$

Demostración 7 Si $x > 0$ y $y > 0$ entonces $|xy| = xy = |x||y|$

Si $x > 0$ y $y < 0$ entonces $|xy| = x \cdot (-y) = |x||y|$

Si $x < 0$ y $y > 0$ entonces $|xy| = (-x) \cdot y = |x||y|$

Si $x < 0$ y $y < 0$ entonces $|xy| = (-x) \cdot (-y) = |x||y|$

Por tanto $|xy| = |x||y|$

3. $-|x| \leq x \leq |x|$

Demostración 8 Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x| \Rightarrow -x \leq x \leq x \Rightarrow -x \leq x \Rightarrow -x + x \leq x + x \Rightarrow 0 \leq 2x$

Análogamente si $x < 0$ se demuestra que $-|x| \leq x \leq |x|$

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración 9

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y| \\ (|x + y|)^2 &\leq (|x| + |y|)^2 \\ (x + y)^2 &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &\leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 + y^2) &\leq x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x^2 + y^2) \\ 2xy &\leq 2|x||y| \\ xy &\leq |x||y| \\ xy &\leq |xy| \end{aligned}$$

5. $|x^a| = |x|^a$

Demostración 10

6. $|x|^2 = x^2$

Demostración 11

7. $||x| - |y|| = |x \pm y|$

Demostración 12

7. La propiedad de completación de \mathbb{R}

Definición 1 (Cota superior) Sea $S \subset \mathbb{R}$, un número M es una cota superior si solo si $x \leq M$ para todo $x \in S$

Definición 2 (Cota inferior) Sea $S \subset \mathbb{R}$, un número m es una cota inferior si solo si $x \geq m$ para todo $x \in S$

Nota 1 Si existe una cota superior, cualquier otra cota mayor a esta es también una cota superior.

Definición 3 (Supremo o mínima cota superior) Sea $S \subset \mathbb{R}$, un número u es llamado supremo de S si solo si es la más pequeña de las cotas superiores, se escribe $u = \sup(S)$

Lema 1 Sea $S \subset \mathbb{R}$, $u = \sup(S)$ si y solo si:

1. No existe ningún elemento de $x \in S$ tal que $x > u$
2. Si $v < u$ entonces existe $x_0 \in S$ tal que $v < x_0 < u$

Demostración 13 La demostración se lo realiza de dos partes:

Primera parte (\Rightarrow) Suponemos que $u = \sup(S)$

Puesto que $u = \sup(S)$, u es cota superior de S , es decir que para todo $x \in S$ $x \leq u$ es decir que no existe ningún elemento de $x \in S$ tal que $x > u$

Segunda parte (\Leftarrow)

Lema 2 $u = \sup(S)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $x_0 \in S$ tal que $u - \epsilon < x_0$

Demostración 14 La demostración se lo realiza de dos partes:

Primera parte (\Rightarrow)

Segunda parte (\Leftarrow)

7.1. El axioma del supremo

Todo conjunto acotado superiormente tiene supremo

Teorema 2 *Todo conjunto acotado inferiormente tiene ínfimo*

Demostración 15 *Sea $S \subset \mathbb{R}$, acotada inferiormente. Se define $T = \{-x/x \in S\}$. Puesto que S es acotada inferiormente. Si m es cota inferior de S*

$$\begin{aligned} m &\leq x, & \forall x \in S \\ -m &\leq -x, & \forall -x \in T \\ -m &\text{ es cota superior de } T \\ T &\text{ es acotado superiormente} \\ \text{Por tanto } T &\text{ tiene supremo} \end{aligned}$$

7.2. La propiedad arquimediana

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$

Demostración 16 *Supongamos que la conclusión es falsa. Es decir:*

$$\begin{aligned} x &\geq n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ x &\text{ es una cota superior de } \mathbb{N} \\ \text{Sea } u &= \sup(\mathbb{N}), \text{ existe un elemento } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\ u - 1 &< n_0 \\ u &< n_0 + 1 \rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

Teorema 3 *Existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 7$*

Demostración 17 *Sea $s = \{y : y^2 \leq 7\}$. 7 debe ser cota superior de S . Si existe no fuera una cota superior entonces existe $y_0 \in S$ tal que $7 < y_0$*

$$7^2 < y_0^2 \leq 7 \rightarrow \leftarrow$$

Al ver S acotado tiene supremo

Sea $x = \sup(S)$ se afirma que $x^2 = 7$, pues caso contrario se afirma que $x^2 < 7$ o $x^2 > 7$

Si $x^2 < 7$: *Entonces tuvieramos que $7 - x^2 > 0$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ elegido convenientemente por propiedad de supremo tal que $\frac{2x+1}{7-x^2} < n_1$ entonces tenemos:*

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{n_1}\right)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n_1} + \frac{1}{n_1^2} \\ &\leq x^2 + \frac{2x}{n_1} + \frac{1}{n_1} \\ &\leq x^2 + \frac{2x+1}{n_1} \\ &< x^2 + 7 - x^2 \text{ dado que } \frac{2x+1}{n_1} < 7 - x^2 \\ &< 7 \\ \left(x + \frac{1}{n_1}\right) &\in S \rightarrow \leftarrow \text{ recordemos que } x = \sup(S) \end{aligned}$$

Si $x^2 > 7$: *Entonces $x^2 - 7 > 0$. Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ elegido adecuadamente tal que $\frac{2x}{x^2-7} < n_2$ entonces tenemos:*

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{1}{n_2}\right)^2 &= x^2 - \frac{2x}{n_2} + \frac{1}{n_2^2} \\
&> x^2 - \frac{2x}{n_2} \\
&> x^2 - (x^2 - 7) \text{ dado que } \frac{2x}{n_2} < x^2 - 7 \\
&= x^2 - x^2 + 7 \\
&> 7
\end{aligned}$$

$\left(x - \frac{1}{n_2}\right)$ es cota superior de $S \quad \rightarrow \leftarrow$ recordemos que $x = \sup(S)$

Corolario 1 Sean $x > 0$ y $y > 0$

- (A) Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$
- (B) Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$
- (C) Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$

Demostración 18 :

(A) Por propiedad arquimediana existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > \frac{y}{x}$$

entonces $nx > y$

(B) Por propiedad arquimediana existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > \frac{1}{x}$$

entonces

$$x > \frac{1}{n} > 0$$

(C) Sea $S = \{k : k \in \mathbb{N}, y < k\}$ entonces $n = \sup(S)$

7.3. Ejercicios