Espacios vectoriales

Arturo Prudencio Nina

16 de abril de 2006

A lo largo del texto nosotros vamos a utilizar la noción de espacio vectorial. Este primer capítulo está destinado a presentar los resultados fundamentales de espacios vectoriales que serán necesarios para el fácil desarrollo de la materia. Varios resultados son presentados sin demostración, para poder profundizar estos resultados uno puede consultar las pruebas de los cursos de álgebra lineal.

1. Primeras definiciones

Definición 1 *El conjunto de números reales R provistos de las operaciones adición y multiplicación de números reales posee una estructura de cuerpo ya que:*

1. *La adicion es asociativa*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \forall a,b,c \in R$$

Esto permite dar sentido a la expresión $a+b+c$ la cuál puede ser realizada sin importar el orden.

2. *Existe un neutro aditivo*

$$\exists 0 \in R, \forall a \in R : a+0 = 0+a = a$$

3. *Existen los opuestos*

$$\forall a \in R, \exists b \in R : a+b = b+a = 0$$

4. *La adición es conmutativa*

$$a+b = b+a \qquad \forall a,b \in R$$

5. *La multiplicación es asociativa*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall a,b,c \in R$$

6. *Existe un neutro multiplicativo*

$$\exists 1 \in R, \forall a \in R : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

7. *Existen los inversos*

$$\forall a \in R - 0, \exists b \in R : a \cdot b = b \cdot a = 1$$

8. *La multiplicación es conmutativa*

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a,b \in R$$

9. La multiplicación es distributiva en relación a la adición

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad y \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in R$$

Nota 1 *De manera general, un conjunto con una operación binaria, interna y que cumple las tres primeras propiedades es llamado grupo. Un conjunto con dos operaciones binarias, internas que satisfacen todas las propiedades salvo la de "multiplicación conmutativa.es llamado cuerpo.*
Un campo (o simplemente un cuerpo) es un elemento esencial para definir la noción de espacio vectorial. Consideremos en el resto del texto el campo $K = R$, de manera generál todo elemento del campo K es llamado escalar.

Definición 2 *Un espacio vectorial sobre K o K-espacio vectorial es un conjunto V provisto de una operación interna*

$$+ : V \times V \to V$$

y de una multiplicación externa

$$\cdot : K \times V \to V$$

que satisface las propiedades siguientes:

1.- $(V, +)$ es un grupo conmutativo, es decir:

1.1. La operación $+$ es asociativa,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall a, b, c \in V$$

Esto permite dar sentido a la expresión $a + b + c$ la cuál puede ser realizada sin importar el orden.

1.2. Existencia de un neutro pra $+$,

$$\forall a \in V, \exists e \in V : a + e = e + a = a$$

1.3. Existencia de opuestos para $+$,

$$\forall a \in V, \exists b \in V : a + b = b + a = e$$

1.4. La operación $+$ es conmutativa,

$$a + b = b + a \qquad \forall a, b \in R$$

2.- Para todo $a, b \in V$ y todo escalar $\alpha, \beta \in K$

2.1. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a,$

2.2. $1 \cdot a = a,$

2.3. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot b,$

2.4. $\alpha \cdot (a + b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)$

Si V es un espacio vectorial, los elementos de V son llamados vectores. El neutro par la operación $+$ es llamado el vector nulo y es denotado por 0.

Ejemplo 1 *El conjunto R^3 de vecotes columnas de tres componentes es un espacio vectorial real. La adición de dos vectores se lo realiza de componente a componente:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

la multiplicación por un escalar es definida también componente a componente

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que: R^3 *con las operaciones de arriba es un espacio vectorial.*
De manera $R^n (n \geq 1)$ *es un espacio vectorial sobre* R.

Ejemplo 2 *El conjunto de las funciones sobre un conjunto* X *y sus valores en* $R, \mathcal{F}(X, R)$ *son las operaciones de adición.*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}, \forall x \in X$$

y multiplicación

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X, \forall \lambda \in R$$

es un espacio vectorial.
Demostrar que: $\mathcal{F}$ *es un espacio vectorial*

Proposición 1 *Sea* V *un* K*-espacio vectorial,* $a, b, c \in V$, $\lambda \in K$ *entonces se tiene:*

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c \qquad y \qquad a + b = c + b \Rightarrow a = c$$

$$0 + a = a$$

$$\lambda \cdot 0 = 0$$

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot b \Rightarrow \lambda = 0 \quad o \quad a = b$$

$$(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$$

Demotración: Ejercicio

Nota 2 *Esta última propiedad muestra la coherencia de la notación* $(-1) \cdot a = -a$. *En particular* $a + (-1) \cdot b = a + (-b)$ *se escribirá* $a - b$. *En lo que sigue se denotorá simplemente por* λa *a* $\lambda \cdot a$.

2. Independencia lineal

Definición 3 *Sea* V *un espacio vectorial y* $a_1, .., a_p$ *elementos de* V, $(p \geq 1)$. *Los vectores* $a_1, .., a_p$ *son linealmente dependientes si existen escalares* $\lambda_1, .., \lambda_p$ *no todos nulos tales que:*