Espacios vectoriales Euclideos

Arturo Prudencio Nina

28 de marzo de 2006

Hasta ahora solo se ha introducido las nociones de recta, plano, de paralelismo, etc. Sin embargo, no se ha hablado de ortogonalidad, longitud, distancia, ángulos, etc. Para poder introducir estos conceptos, hace falta dotar al espacio vectorial sobre el cual esta construido el espacio afín A de una estructura más rica. En este capítulo introduciremos el concepto de producto escalar para poder considerar los espacios vectoriales Euclideos.

1. Producto Escalar

Definición 1 *Sea V un espacio vectorial real. Un producto escalar sobre V es una forma bilineal φ simétrica definida positiva. Esto significa que la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u, v & \rightarrow & \varphi(u,v) = \langle u, v\rangle \end{array}$$

cumple para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$, $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle u, w\rangle$
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
3. *Si* $v \neq 0$, *entonces* $\langle v, v\rangle > 0$

Definición 2 *Un espacio vectorial V provisto de un producto escalar φ es llamado un espacio Euclideo $\varepsilon = (V, \varphi)$*

En el resto del capítulo solo se considerarán espacios vectoriales reales. Los resultados que siguen pueden ser mostrados en todo espacio vectorial Euclideo ε.

Ejemplo 1 *En el caso de $\mathbb{R}^n$ se tiene el producto escalar canónico, el cual es definido como:*

$$\langle x, y\rangle = y^t x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ejercicio: verificar que realmente se trata de un producto escalar.

Definición 3 *Se llama norma Euclideana de un vector x a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*

Nota 1 *Se dirá que un vector v es normado si $\|v\| = 1$*

Proposición 1 *Sea ε un espacio Euclideo, entonces la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|:\varepsilon & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \qquad \forall x \in \varepsilon$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x \in \varepsilon$

Demostración (1):

$$\|x\| = 0 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Demostración (2):

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda x\| & = & \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \\ & = & \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} \\ & = & |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} \\ & = & |\lambda|\|x\| \end{array}$$

Demostración (3):

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|^2 & = & \langle x+y, x+y\rangle \\ & = & \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ & = & \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ & = & (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x+y\| & \leq & \|x\| + \|y\| \end{array}$$

Proposición 2 *(Desigualdad de Cauchy-Shwartz) Sea ε un espacio Euclidaneo, entonces:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

cumpliendose la igualdad si y solo si x,y son linealmente dependientes

Demostración. Sean $x, y \in \varepsilon$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha x + y\|^2 & = & \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \\ & = & \alpha^2\langle x, x\rangle + 2\alpha\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ & = & \alpha(\alpha\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \end{array}$$

como $\|\alpha x + y\| \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tomando $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,z\rangle}$ tenemos

$$0 \leq -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, y\rangle}\left(-\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle\right) + \langle y, y\rangle$$

de donde

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Además $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y solo si existe α tal que $\|\alpha x + y\| = 0$ si y solo si x,y son linealmente dependientes.

2. Propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -12 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$[v, w, u]$
lineal en cada componente

$$\begin{aligned} [\alpha v_1 + \beta v_2, w, u] &= |\lambda v_1 + \beta v_2 \quad w \quad u| \\ &= |\alpha v_1 \quad w \quad u| + |\beta v_2 \quad w \quad u| \\ &= \alpha |v_1 \quad w \quad u| + \beta |v_2 \quad w \quad u| \end{aligned}$$

e_1, e_2, e_3
$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$
$[u, v, w] = |u \quad v \quad w| \neq 0 = \begin{cases} <0 \\ >0 \end{cases}$
u,v
$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle, \forall w \in \mathbb{R}^3$
$v_1, .., v_n \in \mathbb{R}^n$
$[v_1, .., v_n] = |v_1 \quad ... \quad v_n|$
$(\alpha u_1 + \beta u_2) \wedge v = \alpha(u_1 \wedge v) + \beta(u_2 \wedge v)$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha u_1 + \beta u_2) \wedge v, w \rangle &= [\alpha u_1 + \beta u_2, v, w] \\ &= \alpha [u_1, v, w] + \beta [u_2, v, w] \\ &= \langle \alpha (u \wedge v) + \beta (u_2 \wedge v), w \rangle \end{aligned}$$

$(\alpha u_1 + \beta u_2) \wedge v = \alpha(u_1 \wedge v) + \beta(u_2 \wedge v)$
$\langle a, w \rangle - \langle b, w \rangle = 0$
$\langle a - b, w \rangle = 0$
$\langle a - b, a - b \rangle = 0$
$a = b$