

# Espacios Afines

Arturo Prudencio Nina

11 de abril de 2006

Si se tiene un espacio vectorial  $V$ , se puede dotar a un conjunto cualquiera  $A$  de una estructura particular (estructura de espacio afín), definiendo en  $A$  una operación de traslación por un vector de  $V$ .

**Definición 1** Sea  $V$  un espacio vectorial real y  $A$  un conjunto no vacío. Se define la operación  $t$  de traslación

$$\begin{aligned}t &: A \times V \rightarrow A \\(P, v) &\rightarrow P + v\end{aligned}$$

tal que se cumpla lo siguiente:

1. Para todo  $P \in A$ ,  $P + 0 = P$ ,
2. Para todo  $P \in A$  y  $v, w \in V$ ,  $(P + v) + w = P + (v + w)$ ,
3. Para todo  $P, Q \in A$  existe un único  $v \in V$  tal que  $Q = P + v$ .

Se dirá que  $A$  dotado de esta operación es un espacio afín.

Los elementos de  $A$  son llamados puntos. Si  $P \in A$  y  $v \in V$  a veces se confunde con la suma de un punto y un vector en lugar de la traslación de  $P$  por  $v$ .

Es importante tener una idea geométrica de lo que estamos diciendo:  $A$  es el conjunto de puntos del espacio, mientras que  $V$  es el espacio vectorial obtenido a partir de todos los vectores fijos que se pueden construir en  $A$ , módulo la relación de equipolencia (tener misma dirección y sentido). Es decir, cuando  $A$  es el conjunto de puntos del espacio,  $V$  es el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Puede ayudar pensar que entendemos  $\mathbb{R}^3$  de dos formas diferentes: por un lado, como conjunto de puntos -que, de momento, no tienen ni coordenadas ni nada- y por otro, como el espacio vectorial que sería un conjunto de vectores que parten de un mismo sitio: el vector  $0$ .

**Nota 1** Algunas consecuencias de la definición

1. La primera condición es resultado de las otras dos. En efecto dado  $P \in A$  existe un único  $v \in V$  tal que  $P + v = P$  y si sumamos el vector  $0$  tenemos que  $(P + v) + 0 = P + 0$  luego por la segunda condición tenemos  $(P + v) + 0 = P + (v + 0) = P + v$ , por lo que podemos escribir  $P + v = P + 0 = P$ . De la unicidad de  $v$  concluimos que  $v = 0$ .
2. De la condición tenemos que si existe  $P \in A$  tal que  $P + v = P + w$ , entonces  $v = w$ .
3. Sean  $P, Q \in A$ ,  $v \in V$ . Si  $P + v = Q + v$  entonces  $P = Q$ .

4. La condición (3) permite definir el vector  $\overrightarrow{PQ}$  como el único vector que relaciona los puntos  $P$  y  $Q$ . En particular para todo punto  $P$  se tiene  $P + 0 = P$  por lo que  $\overrightarrow{PP} = 0$ .

5. La condición (2) da sentido a la expresión

$$P + v_1 + \dots + v_k = (\dots((P + v_1) + v_2) + \dots) + v_k = P + (v_1 + \dots + v_k)$$

**Proposición 1** Sean  $P, Q \in A$ , entonces

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

*Demostración.* Por definición  $\overrightarrow{PQ}$  es el único vector tal que  $P + \overrightarrow{PQ} = Q$  y  $\overrightarrow{QP}$  es el único vector tal que  $Q + \overrightarrow{QP} = P$ , luego;

$$P + 0 = P = Q + \overrightarrow{QP} = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QP} = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP})$$

Por lo tanto

$$0 = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$$

de donde se tiene  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

**Proposición 2** Sean  $P, Q, R \in A$  entonces

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

*Demostración.* Tenemos  $R = P + \overrightarrow{PR}$ ,  $R = Q + \overrightarrow{QR}$  y  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ , luego

$$R = P + \overrightarrow{PR} = Q + \overrightarrow{QR} = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

luego  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

**Corolario 1** Sean  $P, Q, R \in A$ , entonces

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP}$$

*Demostración.*

Ya demostramos que  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$  y que  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ . Luego:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP}$$

**Nota 2** Sabemos que si  $P, Q \in A$ , existe un único vector  $\overrightarrow{PQ}$  tal que  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ , esto nos permite escribir

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

De cierta forma esto define una suma particular (diferencia) de puntos de  $A$ . Pero debe remarcarse que  $Q - P$  es solo una escritura simbólica de  $\overrightarrow{PQ}$ .

## 1. Vectores ligados

**Definición 2** Sea  $P \in A$ . Se denota por  $\overrightarrow{A}$  el espacio vectorial asociado a  $A$ . El par ordenado  $(P, Q)$  de puntos de  $A$  es llamado un vector ligado a  $P$ .

Por otra parte, es claro que la aplicación:

$$A \times A \rightarrow \overrightarrow{A}$$

$$(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ}$$

es una biyección entre los conjuntos de los vectores ligados en  $P$  y  $\vec{A}$ , de esta manera se puede definir una suma entre vectores ligados

$$(P, Q) + (P, R) = (P, P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$$

y la multiplicación por un escalar

$$\lambda \cdot (P, Q) = (P, P + \lambda \overrightarrow{PQ})$$

Demostrar que:  $A_p$  el conjunto de los vectores ligados a  $P$  posee una estructura de espacio vectorial.

**Definición 3** Definimos una relación de equipolencia en el producto cartesiano  $A \times A$  de la siguiente forma. Los vectores ligados  $(P, Q)$  y  $(R, S)$  son equipolentes si  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

**Definición 4** Cuatro puntos  $A, B, C, D$  de un espacio afín forman un paralelogramo si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

La adición de vectores ligados a  $P$  sigue la regla del paralelogramo. Si

$$(P, R) + (P, Q) = (P, S)$$

entonces significa que  $S = P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}$  entonces

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$$

Por consiguiente  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$  lo que significa que  $P, Q, R, S$  es un paralelogramo.

## 2. Combinaciones afines

En esta sección se generalizará la operación  $P - Q$  a un número limitado de puntos de  $A$

**Proposición 3** Sean  $P_1, \dots, P_n$  puntos de  $A$ , Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son números reales tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  entonces el punto

$$Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

no dependen de la elección del punto  $Q$

*Demostración.* Sean  $Q, R$  puntos de  $A$  entonces

$$\begin{aligned} Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} &= Q + \lambda_1 (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_1}) + \dots + \lambda_n (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_n}) \\ &= Q + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QR} + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \\ &= Q + \overrightarrow{QR} + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \\ &= R + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \end{aligned}$$

**Definición 5** Gracias a la proposición precedente se puede definir las combinaciones afines de puntos  $P_1, \dots, P_n$  y coeficientes  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  por

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

Para cualquier punto  $Q \in A$ .

Se cumple comunmente la terminología baricentro de los puntos  $P_1, \dots, P_n$  para los pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  en el caso particular donde los coeficientes sean iguales  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  se obtiene el centro de gravedad también llamado isobaricentro

**Corolario 2** Sean  $P_1, \dots, P_n$  puntos de  $A$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  números reales tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . La combinación afín  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  es el único punto  $Q$  tal que  $\lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} = 0$ .

*Demostración.* Por definición de baricentros tenemos:

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

Luego, como

$$\begin{aligned} Q &= \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \\ Q &= Q + 0 \\ Q &= Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} \end{aligned}$$

de donde  $\lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} = 0$

**Proposición 4** (Asociatividad de baricentros) Sean  $m$  y  $n$  dos enteros positivos tales que  $m < n$ ,  $P_1, \dots, P_n$  puntos de  $A$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  números reales tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Si

$$G_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_m$$

y

$$G_2 = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_{m+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_n$$

entonces

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) G_1 + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) G_2$$

*Demostración.* Para cualquier  $Q \in A$  se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n &= Q + \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{QP_m} + \lambda_{m+1} \overrightarrow{QP_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} \\ &= Q + \lambda_1 (\overrightarrow{QG_1} + \overrightarrow{G_1 P_1}) + \dots + \lambda_m (\overrightarrow{QG_1} + \overrightarrow{G_1 P_m}) + \lambda_{m+1} (\overrightarrow{QG_2} + \overrightarrow{G_2 P_{m+1}}) \\ &\quad + \dots + \lambda_n (\overrightarrow{QG_2} + \overrightarrow{G_2 P_n}) \\ &= Q + (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} + \lambda_1 \overrightarrow{G_1 P_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{G_1 P_m} + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QG_2} \\ &\quad + \lambda_{m+1} \overrightarrow{G_2 P_{m+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{G_2 P_n} \\ &= Q + (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} + \lambda_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_m \right) P_1 \\ &\quad + \dots + \lambda_m \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} P_m \right) P_m + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QG_2} \\ &\quad + \lambda_{m+1} \left( \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_{m+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_n \right) P_{m+1} + \dots \\ &\quad + \lambda_n \left( \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_{m+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} P_n \right) P_n \\ &= Q + (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \overrightarrow{QG_1} + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QG_2} \end{aligned}$$

De donde se tiene

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) G_1 + (\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) G_2$$

**Nota 3** La proposición nos muestra que es permitido el cálculo de baricentros de un conjunto particionando dicho conjunto

**Proposición 5** Sean  $P_1, \dots, P_n$  puntos de  $A$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son escalares tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , entonces el vector:

$$v = \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n}$$

es independiente de la elección del punto  $Q$  de  $A$ .

*Demostración.* Sean  $Q$  y  $R$  puntos de  $A$ , entonces

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 \overrightarrow{QP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{QP_n} \\ &= \lambda_1 (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_1}) + \dots + \lambda_n (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP_n}) \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{QR} + \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{RP_n} \end{aligned}$$

**Definición 6** El vector cuya ecuación es dada en la proposición precedente es denotado por

$$v = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

**Nota 4** La notación para el vector  $v$  es coherente con lo ya visto en un corolario anterior

### 3. Variedades afines

**Definición 7** Sea  $A$  un espacio afín. Un subconjunto  $F$  de  $A$  es una variedad (lineal) afín (subespacio afín) si cualquier baricentro de puntos de  $F$  está en  $F$ .

**Proposición 6** Sea  $A$  un espacio afín. Un subconjunto  $F$  de  $A$  es una variedad afín, si y solo si, para todo par de puntos  $P, Q$  de  $F$  todo baricentro de  $P$  y  $Q$  pertenece a  $F$ .

*Demostración.* La condición necesaria es inmediata (definición de variedad afín).

Para demostrar la condición suficiente tomemos  $(P_i)_{i \in I}$  una familia de puntos de  $F$ . Se realizará un proceso de inducción sobre el cardinal del conjunto de índices de  $I$ . Por hipótesis se cumple si el cardinal de  $I$  es dos. Supongamos cierto el resultado para  $I < n$ .

Sea  $I = n$  entonces tomemos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  escalares tal que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , luego existen  $n-1$  elementos cuya suma es distinta de cero, ya que caso contrario se tendría  $\lambda_i = 1$  para  $i = 1, \dots, n$  contradiciendo el hecho de que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \neq 0$ , luego por la asociatividad de baricentros tenemos:

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) G_1 + \lambda_n P_n$$

donde  $G_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}} P_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}} P_{n-1}$  que por hipótesis de inducción pertenece a  $F$ .

**Proposición 7** Sea  $A$  un espacio afín asociado al espacio vectorial  $V$ . Un subconjunto no vacío  $F$  de  $A$  es una variedad afín, si y solo si, existe un subespacio vectorial  $U$  de  $V$  que dota a  $F$  de estructura de espacio afín.

*Demostración.* Mostremos la condición necesaria,  $F$  es una variedad y consideremos el conjunto.

$$U = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in F\} \quad P \text{ es un punto fijo}$$

Ahora mostraremos que  $U$  es un subespacio vectorial. Como  $F$  es una variedad afín no vacía existe  $P \in F$  luego  $\overrightarrow{PP} \in U$ .

Ahora dados los puntos  $Q, R$  en  $F$  y  $\lambda_1, \lambda_2$  escalares. El punto  $S$

$$S = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R$$

es baricentro de los puntos  $P, Q$ , y  $R$  por lo cual pertenece a  $F$  entonces el vector

$$\overrightarrow{PS} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \overrightarrow{PP} + \lambda_1 \overrightarrow{PQ} + \lambda_2 \overrightarrow{PR} = \lambda_1 \overrightarrow{PQ} + \lambda_2 \overrightarrow{PR} \in U$$

Un corolario anterior muestra que  $U$  no depende de la elección del punto  $P$ . Por lo tanto  $U$  es un espacio vectorial.

Para mostrar que  $U$  dota a  $F$  una estructura de espacio afín es suficiente mostrar que dados  $Q \in F$  y  $u \in U$  el elemento  $Q + u$  está en  $F$ , ya que  $U$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Pero esto es evidente ya que existe  $R$  en  $F$  tal que  $u = \overrightarrow{QR}$  y  $R = Q + \overrightarrow{QR} = Q + u$ .

Para mostrar la condición suficiente tomemos los puntos  $A, B, C$  en  $F$  y los escalares  $\lambda_1, \lambda_2$  talque  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Sea  $P = \lambda_1 A + \lambda_2 B$  fijando el punto  $C$  tenemos

$$\overrightarrow{CP} = \lambda_1 \overrightarrow{CA} + \lambda_2 \overrightarrow{CB}$$

Los vectores  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$  pertenecen al subespacio vectorial asociado a  $F$ , por lo que  $\overrightarrow{CP}$  pertenece al mismo subespacio, entonces el punto  $P$  pertenece a  $F$  y por una proposición anterior  $F$  es una variedad afín.

**Nota 5** Si  $F$  es una variedad afín no vacía el subespacio vectorial asociado es denominado la dirección de  $F$ . Frecuentemente se escribe

$$F = \{M + u \mid u \in U\} = M + U$$

**Proposición 8** Sea  $F$  una variedad afín de la forma  $P + U$ . Para todo punto  $Q \in F$  se tiene:

$$F = Q + U$$

*Demostración.* Sea  $F = P + U$  y  $Q \in F$ , entonces existe  $v_0$  en  $U$  tal que  $Q = P + v_0$

$$\begin{aligned} Q + U &= \{Q + u \mid u \in U\} \\ &= \{P + v_0 + u \mid u \in U\} \\ &= \{P + w \mid w \in U\} \\ &= P + U \end{aligned}$$

**Definición 8** Sea  $A$  un espacio afín y  $F$  una variedad afín no vacía de dirección  $U$ . Si

1.  $U$  es una recta vectorial,  $F$  es una recta afín
2.  $U$  es un plano vectorial,  $F$  es un plano afín
3.  $U$  es un hiperplano vectorial,  $F$  es un hiperplano afín

## 4. Intersección y Paralelismo

**Proposición 9** La intersección de dos variedades afines si no es vacía es una variedad afín.

*Demostración.* Sean  $F = P + U$  y  $G = Q + W$  las variedades afines,  $U$  y  $W$  los subespacios vectoriales asociados. Si  $F \cap G \neq \emptyset$ , existe  $R \in F \cap G$ , además la intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. Tomemos  $\vec{a} \in U \cap W$  entonces el punto  $R + \vec{a}$  pertenece a  $F$  y  $G$ , por lo cual  $R + (U \cap W)$  es una variedad afín contenida en  $F$  y  $G$ . Por otra parte, sea  $S \in F \cap G$ , luego  $\overrightarrow{RS} \in U \cap W$  por lo que  $S = R + \overrightarrow{RS}$  debe estar en  $R + (U \cap W)$ .

Se puede precisar cuando dos variedades afines  $F$  y  $G$  no vacías se intersectan

**Teorema 1** Sea  $A$  un espacio afín,  $F = P + U$  y  $G = Q + W$  variedades afines entonces

$$F \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall A \in F, \forall B \in G, \overrightarrow{AB} \in U + W$$

*Demostración.* Si  $F \cap G \neq \emptyset$  existe  $R$  en  $F \cap G$ , luego

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} \quad \forall A \in F, \forall B \in G$$

por lo que,  $\overrightarrow{AB}$  pertenece a  $U + W$

Recíprocamente, sean  $A \in F$  y  $B \in G$ , tal que:  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{w}$  con  $\vec{u} \in U$  y  $\vec{w} \in W$ , entonces  $M = A + \vec{u}$  es un punto de  $F$ , afirmamos que  $M$  es un punto de  $G$ , en efecto

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{w}$$

**Definición 9** Una variedad afín  $F = P + U$  es paralela a una otra variedad afín  $G = Q + W$ , si el subespacio vectorial  $U$  está incluido  $W$ , es decir, si  $U \subset W$ .

**Proposición 10** Se tiene los siguiente enunciados

1. Si dos variedades afines paralelas tienen un punto en común, entonces una está incluida en la otra
2. Si dos variedades afines paralelas tienen la misma dimensión, entonces ellas poseen el mismo subespacio vectorial director. En particular si ellas tienen un punto en común ellas coinciden.
3. Dada una variedad afín  $F$  todo punto  $P$  pertenece a una sola variedad afín paralela a  $F$  de la misma dimensión (Postulado de Euclides)

*Demostración.* Ejercicio

## 5. Sistemas de referencia y coordenadas

**Definición 10** Los puntos  $P_1, \dots, P_n$  son dependientes (de forma afín) si uno de los elementos es una combinación afín de los otros. Caso contrario, ellos son independientes.

**Definición 11** Un sistema de referencia afín de un espacio afín  $A$  es un conjunto de puntos  $P_1, \dots, P_n$  independientes, tal que  $\forall P \in A$ , existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  escalares con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  y  $P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$

**Definición 12** Un sistema de referencia cartesiano de un espacio afín  $A$  es un par.

$$(O, \{e_1, \dots, e_n\})$$

donde  $O$  es un punto de  $A$ , llamado origen del sistema de referencia, y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base del espacio vectorial asociado a  $A$ . Las coordenadas (cartesianas) de un punto  $P$  en el sistema de referencia son las componentes del vector  $\overrightarrow{OP}$ .

**Proposición 11** Los puntos  $O, P_1, \dots, P_n$  son independientes si y solo si los vectores  $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$  son linealmente independientes.

*Demostración* Mostremos la condición necesaria.

Si los vectores  $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$  no son linealmente independientes, existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} = 0$$

supongamos que  $\lambda_i \neq 0$ , entonces

$$\overrightarrow{OP_i} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \overrightarrow{OP_1} + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \overrightarrow{OP_{i-1}} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \overrightarrow{OP_{i+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \overrightarrow{OP_n}$$

de donde:

$$P_i = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_i} + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right)O + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}P_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}P_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}P_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i}P_n$$

contradiciendo nuestra hipótesis.

La demostración de la condición suficientes es dejada como Ejercicio

**Corolario 3** Un par  $(O, \{v_1, \dots, v_n\})$  es un sistema de referencia cartesiano el espacio afín  $A$  si y solamente si los  $n + 1$  puntos  $O, P_1 = O + v_1 + \dots + P_n = O + v_n$  son independientes.

*Demostración Ejercicio*

Sean:

$$\mathcal{R}_\infty = (O_1, \{v_1, \dots, v_n\}) \quad \mathcal{R}_\epsilon = (O_2, \{u_1, \dots, u_n\})$$

dos sistemas de referencia cartesiano de un espacio afín  $A$  y  $M$  la matriz de cambio de base de la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  a la base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Si  $(x_1, \dots, x_n)$  (resp.  $(y_1, \dots, y_n)$ ) son las coordenadas de un punto cualquiera de  $P$  de  $A$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}_\infty$  (resp.  $\mathcal{R}_\epsilon$ , entonces):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + T$$

donde  $T$  es el vector de las componentes del vector  $\overrightarrow{O_2O_1}$  en la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Que representa un cambio de base en un espacio afín.

## 6. Ecuaciones paramétricas y cartesianas de variedades afines

Sea  $A$  un espacio afín de dimensión  $u$  y  $\mathcal{R}_F$  un sistema de referencia cartesiano. Consideremos una variedad afín  $F$  de dimensión  $p \leq n$ . Sea  $u_1, \dots, u_p$  una base de  $F$  entonces

$$F = P_0 + \langle u_1, \dots, u_p \rangle = \{Q \in A \mid Q = P_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p\}$$

de donde

$$Q = P_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

es una representación paramétrica de  $F$ .

Sea  $R = (O, \{v_1, \dots, v_n\})$  un sistema de referencia cartesiano del espacio afín, sean  $(x_1, \dots, x_n)$  las coordenadas del punto  $P_0$  y  $(u_{1i}, \dots, u_{ni})$  las coordenadas de los vectores  $u_i, i = 1, \dots, p$  en la base de  $\mathcal{R}$ . Un punto  $Q$  de coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  pertenece a  $F$  si y solamente si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  escalares

tales que:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_p u_{p1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_n &= x_n + \lambda_1 u_{n1} + \dots + \lambda_p u_{pn} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de F.

Para obtener las ecuaciones cartesianas de F, vamos a recurrir a la representación cartesiana de un subespacio vectorial. Un punto Q de A pertenece a F si y solamente si,  $\overrightarrow{P_0Q}$  pertenece al subespacio vectorial  $U = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$  el cuál está caracterizado por  $n - p$  ecuaciones homogéneas independientes

### Proposición 12

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad i = 1, \dots, n - p$$

el vector  $\overrightarrow{P_0Q}$  pertenece a U si y solamente si

$$\begin{aligned} a_{11}(y_1 - x_1) + \dots + a_{1n}(y_n - x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n-p,1}(y_1 - x_1) + \dots + a_{n-p,n}(y_n - x_n) &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n &= b_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n-p,1}y_1 + \dots + a_{n-p,n}y_n &= b_{n-p} \end{aligned}$$

donde  $b_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$  para  $i = 1, \dots, n - p$  estas son las ecuaciones cartesianas de F

## 7. Ejercicios

- Mostrar que  $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus f \text{ continua y } f(x+1) = f(x) + 1\}$  es una variedad afín. Determinar un punto y la dirección.
- Sea  $A, B, C$  un triángulo.  $A', B', C'$  los puntos medios de  $[B, C]$ ,  $[A, C]$  y  $[A, B]$  respectivamente y G el centro de gravedad de  $ABC$ .
  - Probar que:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GC'}$  y deducir que  $G \in (C, C')$   
Solución:
$$C' = \frac{A+B}{2} \Rightarrow 2C' = A+B$$

$$2\overrightarrow{GC} = 2C' - 2G = A - G + B - G = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$$
  - Mostrar que  $G \in (A, A')$  y  $G \in (B, B')$
  - Mostrar que G es el centro de gravedad del triángulo  $A'B'C'$ .
- Sea  $(x, y, z)$  las coordenadas baricéntricas del punto P en el sistema de referencia afín  $(1, -1), (1, 2), (1, 1)$ . Hallar las coordenadas cartesianas del punto P en el sistema de referencia cartesiano inducido por el sistema de referencia afín y en el sistema de referencia cartesiano  $\{(2, -5), \{(1, 2), -1, 3\}\}$

4. Para que  $\alpha \in \mathbb{R}$  se considera la aplicación

$$\Phi_\alpha((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Para que valores de  $\alpha$ ,  $\Phi_\alpha$  es un producto escalar. Para cada uno de tales valores de  $\alpha$ , hallar un vector ortogonal unitario a  $v = (1, 1, 0)$

5. Hallar la proyección ortogonal del punto  $P(3, 2, 1, 0)$  sobre la variedad afín

$$F = (1, 1, 0, -1) + \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1) \rangle$$